

Chapitre

Rappels

1.1 Électrostatique

π Théorème 1.1 : Champ électrostatique au point M

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{PM^2} \vec{u}$$

avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction de PM.

π Théorème 1.2 : Force électrostatique

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{PM^2} \vec{u}$$

avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction de PM.

! Théorème de superposition

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=0}^N \vec{e}_n$$

avec $\vec{e}_n$ la contribution d'une particule

π Théorème 1.3 : Distribution volumique

$$\vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}$$

avec $d\tau$ un élément de volume.



Définition 1.1 : Caractéristique d'une ligne de champ

$$\vec{dl} \wedge \vec{E}(M) = \vec{0}$$

1.1.1 Symétrie

Situation	Direction
$M \in \pi^+$	E est contenu au plan
$M \in \pi^-$	B est $\perp$ au plan
$(Oxy) \in \pi^+$	Selon z, E_z impaire, B_x, B_y paires
$(Oxy) \in \pi^-$	Selon z, E_z paire, B_x, B_y impaires

1.1.2 Théorème de Gauss



Théorème 1.4 : Théorème de Gauss

$$\phi = \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec $\vec{dS}$ orienté vers l'extérieur



Théorème 1.5 : Forme locale du Théorème de Gauss / Maxwell - Gauss

$$\text{Div } \vec{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



Preuve 1.1

On utilise Green-ostrogradski :

$$\iint \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \cdot d\tau$$

En l'appliquant, on obtient

$$\text{Div } \vec{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



Théorème 1.6 : Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$



Preuve 1.2

On rappelle que la circulation de $\vec{E}(M)$ le long d'un contour fermé est nulle.

On utilise le Théorème de Stokes :

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Ici, } \int_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

1.1.3 Relations de passage/continuité/discontinuité



Théorème 1.7 : Relation de passage

La composante normale à l'interface de $\vec{E}(M)$ est discontinue à la traversée d'une interface chargée. On a en effet

$$\vec{n}_{ext} \cdot (\vec{E}(M)_{ext} - \vec{E}(M)_{int}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La composante tangentielle est continue :

$$\vec{n}_{ext} \wedge (\vec{E}(M)_{ext} - \vec{E}(M)_{int}) = \vec{0}$$



Preuve 1.3

On considère une surface chargée et on construit un cylindre de hauteur infinitésimale h de part et d'autre de l'interface, avec des surfaces de base S_1 et S_2 de même aire S .

En appliquant le théorème de Gauss sur ce cylindre :

$$\iint_{\text{surface}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Le flux à travers la surface latérale tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$. Il reste :

$$E_{\text{ext},n} \cdot S - E_{\text{int},n} \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

En divisant par S :

$$E_{\text{ext},n} - E_{\text{int},n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ce qui peut s'écrire vectoriellement :

$$\vec{n}_{\text{ext}} \cdot (\vec{E}(M)_{\text{ext}} - \vec{E}(M)_{\text{int}}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Pour la composante tangentielle, on applique le théorème de Stokes sur un contour fermé perpendiculaire à l'interface.

Comme $\vec{\text{rot}} \vec{E}(M) = \vec{0}$, la circulation est nulle, donc la composante tangentielle est continue.

1.1.4 Potentiel électrostatique et équation de Poisson

La circulation de $\vec{E}(M)$ entre 2 points A et B ne dépend que de la différence de potentiel entre ces 2 points du chemin :



Théorème 1.8 : Relation du potentiel

$$\int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$



Théorème 1.9 : Équation de Poisson

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Preuve 1.4**

$$\text{Div } \vec{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En remplaçant $\vec{E}(M)$ par son expression en fonction de V , on obtient

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1.1.5 Matériaux conducteurs

Ils contiennent des charges libres.

**Définition 1.2 : Densité de courant**

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse des charges.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}(M)$$

où γ est la conductivité.

**Théorème 1.10 : Intensité du courant**

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

1.1.6 Conducteurs en équilibre électrostatique

Un conducteur soumis à un champ crée un champ intérieur de lui-même. Les charges répondent au champ extérieur et arrêtent de se déplacer quand le champ total $\vec{E}(M)_{tot}$ est nul.

Répartition des charges

Quand $\vec{E}(M)_{tot} = \vec{0}$, sont divergent aussi et donc $\rho = 0$.

S'il a été préalablement chargé : $\sigma \neq 0$

Potentiel

Le potentiel est alors constant, le conducteur est équipotentiel.

1.1.7 Au voisinage d'une surface

Théorème 1.11 : Théorème de Coulomb

$$\vec{E}(M)_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$$

Application à l'effet de pointe

On modélise une pointe par des sphères en contact les unes avec les autres. L'ensemble du conducteur est chargé avec une charge totale Q . Le potentiel d'une sphère isolée s'écrit :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Considérons deux sphères 1 et 2 mises en contact. Puisqu'elles forment un conducteur unique, elles sont équipotentielles :

$$V_1 = V_2 \implies \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

En exprimant les charges en fonction des densités surfaciques : $Q_1 = \sigma_1 S_1$ et $Q_2 = \sigma_2 S_2$ (avec $S_i = 4\pi R_i^2$), on obtient :

$$\sigma_2 = \frac{R_1}{R_2} \sigma_1$$

Puisque $R_2 < R_1$, on a $\sigma_2 > \sigma_1$. La densité de charge augmente aux points de plus petit rayon. Par le théorème de Coulomb, le champ électrique à la surface s'intensifie considérablement à la pointe.

1.2 Magnétostatique

Théorème 2.1

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

1.2.1 Ensemble de charges en mouvement

**Théorème 2.2 : Champ magnétique d'un volume**

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau$$

**Théorème 2.3 : Loi de Biot et Savat**

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

1.2.2 Invariances et symétrie

Situation	Direction
$M \in \pi^+$	B est $\perp$ au plan
$M \in \pi^-$	B est contenu dans le plan
$(Oxy) \in \pi^+$	Selon z, B_z paire, B_x, B_y impaires
$(Oxy) \in \pi^-$	Selon z, B_z impaire, B_x, B_y paires

1.2.3 Théorème d'Ampère

On se place sur un contour fermé

**Théorème 2.4 : Théorème d'Ampère**

$$\int_C \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{entrées par C}}$$

Les courant sont comptés positivement s'ils sont dans le sens de $\vec{n}$.

**Théorème 2.5 : Théorème d'Ampère pour une distribution volumique de courant**

$$\int_C \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$



Théorème 2.6 : Forme locale du théorème d'Ampère / Maxwell - Ampère

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

1.2.4 Conservation du flux magnétique



Théorème 2.7 : Loi de conservation du flux magnétique

$$\phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$$



Théorème 2.8 : Forme locale de la conservation

$$\text{Div } \vec{B}(M) = 0$$



Preuve 2.1 : Forme locale

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{Div}(\vec{B}(M)) \cdot d\tau$$

Puisque le flux magnétique est nul pour toute surface fermée, on a :

$$\iiint_V \text{Div}(\vec{B}(M)) \cdot d\tau = 0$$

Cette égalité étant vraie pour tout volume V , l'intégrande doit être nul :

$$\text{Div } \vec{B}(M) = 0$$

1.2.5 Relations de passage



Théorème 2.9 : Relation de passage pour le champ magnétique

- La composante normale de $\vec{B}(M)$ est continue lors de la

traversée d'une nappe :

$$\vec{n}_{ext} \cdot (\vec{B}(M)_{ext} - \vec{B}(M)_{int}) = 0$$

- La composante tangentielle est discontinue :

$$\vec{n}_{ext} \wedge (\vec{B}(M)_{ext} - \vec{B}(M)_{int}) = \mu_0 \vec{j}$$

1.2.6 Potentiel vecteur

Puisque $\text{Div } \vec{B}(M) = 0$, il existe un vecteur $\vec{A}$ tel que $\text{Div}(\text{rot}(\vec{A})) = 0$, on a $\vec{B}(M) = \text{rot} \vec{A}$. On appelle $\vec{A}$ le potentiel vecteur et $\vec{B}(M)$ dérivé de $\vec{A}$

Définition 2.1 : Potentiel vecteur

On appelle $\vec{A}$ le potentiel vecteur de $\vec{B}(M)$:

$$\vec{B}(M) = \text{rot} \vec{A}$$

On cherche à établir une relation entre $\vec{A}$ et les sources $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{B}(M) &= \text{rot} \text{rot} \vec{A} \\ &= \text{grad}(\text{Div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

On définit $\vec{A}$ à une constante près : $\text{Div} \vec{A} = 0$ (jauge de Coulomb)

On obtient

Théorème 2.10 : Équation de Poisson

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

On peut montrer que

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(P) d\tau}{PM}$$

et pour un circuit filaire

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}}{PM}$$

1.2.7 Interactions Électromagnétiques

Force de Lorentz

π Définition 2.2 : Force de Lorentz

$$\vec{f} = q(\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M))$$

avec v la vitesse de la particule

Force de Laplace

Au sein d'un conducteur, on a 2 types de charges, les charges mobiles (ρ_m) et les charges fixes (ρ_f). La neutralité est assurée par $\rho_m + \rho_f = 0$.

Pour un volume infinitésimal du conducteur, on applique la force EM sur l'ensemble des charges :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \rho_f d\tau (\vec{E}(M) + \vec{V} \wedge \vec{B}(M)) \\ &+ \rho_m d\tau (\vec{E}(M) + (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B}(M)) \\ &= \rho_m d\tau \vec{v} \wedge \vec{B}(M) \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}(M)$$

$\vec{V}$ est la vitesse de déplacement du conducteur et $\vec{v}$ celle des charges mobiles

En appliquant $\rho_m = -\rho_f$

Avec $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$

On peut aussi, en écrivant $\vec{j} d\tau = \vec{j} S dl = j S d\vec{l} = I d\vec{l}$:

π Définition 2.3 : Force de Laplace

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$