



Chapitre

Position et impulsion d'une particule quantique

4.1 Position et impulsion d'un paquet d'ondes

π Définition 1.1 : Paquet d'ondes

La fonction d'onde spatio-temporelle s'écrit sous la forme d'une superposition d'ondes planes :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(p, t) e^{i(px - Et)/\hbar} dp$$

π Définition 1.2 : Représentation en impulsion

L'amplitude de probabilité en impulsion $\phi(p, t)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde en position $\psi(x, t)$:

$$\phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) e^{-ipx/\hbar} dx$$

4.2 Représentations

π Définition 2.1 : Représentation position

La fonction d'onde $\psi(r) = \langle r|\psi \rangle$ représente l'état $|\psi\rangle$ dans la base des positions.

π Définition 2.2 : Représentation impulsion

L'amplitude de probabilité $\phi(p) = \langle p|\psi \rangle$ représente l'état $|\psi\rangle$ dans la base des impulsions.

4.3 Principe d'indétermination de Heisenberg

π Définition 3.1 : Inégalité de Heisenberg

Pour chaque composante spatiale ($i = x, y, z$) :

$$\Delta x_i \cdot \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}$$

Cette inégalité est intrinsèque aux systèmes quantiques et indépendante de l'appareil de mesure. Elle ne porte que sur les écarts-types; il n'y a aucune restriction sur les valeurs moyennes.

π Proposition 3.1 : Conséquences

- Il est impossible de préparer une particule quantique dans un état physique où sa position et son impulsion soient simultanément définies avec une précision arbitraire.
- Il est impossible de définir la trajectoire ou le « mouvement » classique d'une particule quantique.

4.4 Principe de correspondance et observables

π Proposition 4.1 : Principe de correspondance

À toute grandeur physique mesurable A est associé un opérateur linéaire et hermitien $\hat{A}$ agissant sur l'espace des états $\mathcal{E}_H$.

π Définition 4.1 : Opérateur position

En représentation position :

$$\hat{\vec{r}}\psi(\vec{r}, t) = \vec{r}\psi(\vec{r}, t)$$

π Définition 4.2 : Opérateur impulsion

En représentation position :

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \implies \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

En représentation impulsion :

$$\hat{\vec{p}}\phi(\vec{p}) = \vec{p}\phi(\vec{p})$$

π Proposition 4.2 : Valeur moyenne de l'impulsion

$$\langle p_x \rangle = \langle \psi | \hat{p}_x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \left(-i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) dx$$

π Définition 4.3 : Opérateur d'une grandeur A

Pour une grandeur classique $A = f(\vec{r}, \vec{p})$, l'observable associée s'écrit :

$$\hat{A} = f(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})$$

π Définition 4.4 : Opérateurs énergie et moment cinétique

- Énergie potentielle : $\hat{V} = V(\hat{\vec{r}})$
- Énergie cinétique : $\hat{E}_c = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
- Moment cinétique (composante x) : $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$



Définition 4.5 : Opérateur Hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$



Proposition 4.3 : Valeur moyenne de l'énergie

$$\langle E \rangle = \int \psi^*(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) \right) d^3 \vec{r}$$



Proposition 4.4 : Théorème d'Ehrenfest

La valeur moyenne $\langle A \rangle$ d'une observable évolue au cours du temps selon :

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$